

# LLPHI 632 : Qu'est-ce qu'un nombre ?

Brice Halimi

Second semestre 2009

Les nombres se situent à la croisée de la philosophie et des mathématiques. Le concept de nombre échoit aux mathématiques car il existe une théorie mathématique des nombres, l'arithmétique, mais, en tant que concept, il relève également de la philosophie, étant donné sa portée extrêmement générale : le domaine du nombre est celui de toute multiplicité d'objets en général. Le nombre enveloppe deux aspects contradictoires : le premier est une mise en équivalence des différents éléments composant une multiplicité (ces différents éléments, bien que distincts, ne sont pas différents au-delà du fait d'être distincts, et à ce titre « comptent » autant les uns que les autres, au même titre) ; le second aspect est une différenciation et une quantification consistant à indiquer « combien de fois » on a un exemplaire de la même chose (cette fois chaque élément vaut individuellement, mais précisément parce qu'on a fait abstraction de tout ce qui le distingue des autres en dehors du fait d'être celui qu'il est, par opposition à tous les autres). Le concept de nombre semble se situer au même niveau de radicalité que ceux d'identité et de différence. Pourtant, un certain nombre de démarches ont envisagé le concept de nombre, non pas comme qqch de primitif, mais comme qqch qu'on peut chercher à analyser. *A priori* il devrait revenir à la philosophie de définir ce qu'est un nombre en général, et à l'arithmétique de dégager les propriétés des nombres. Ce n'est pas ainsi que ça s'est passé. En réalité la complexification de l'édifice de l'arithmétique, ses profondes avancées et l'introduction de différentes sortes de nombres (généralisations successives de l'idée de nombre naturel) ont eu pour effet, par contrecoup, de demander une clarification générale, qui a pris la forme, indissociablement, d'une élucidation conceptuelle (plutôt philosophique) et d'une formalisation (plutôt mathématique). D'un côté, l'arithmétique parvient à un tel degré de généralité qu'elle acquiert un statut philosophique. Mais d'un autre côté, le développement de l'arithmétique est dû à l'emploi de ressources symboliques et conceptuelles qui autonomisent l'arithmétique et posent la question d'un hiatus entre langage ordinaire et langage mathématique. L'arithmétique parvient à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle à une masse critique qui demande un effort de systématisation et de rigueur. Cet effort ouvre la porte à la philosophie, et un certain nombre de considérations purement spéculatives vont ainsi être intégrées aux mathématiques. Mais d'un autre côté cela coïncide également avec l'autonomisation définitive de l'arithmétique comme discipline à la fois algébrique et logico-mathématique. C'est ce chassé-croisé qui s'opère à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et le début du XX<sup>e</sup>.

Philosophiquement, les nombres posent plus particulièrement que toute autre notion la question du statut de l'abstraction (en particulier du statut de l'abstraction mathématique, et la question du rapport éventuel entre l'abstraction mathématique et d'autres formes d'abstraction) et le problème de l'objectivité mathématique (cf. problème de Benacerraf). L'abstraction géométrique est une abstraction fondée sur l'idée de figure prise comme paradigme. Ce que je démontre du triangle est adhérent aux constructions que je trace sur le triangle particulier avec lequel je travaille. Les propriétés ne sont pas en fait des propriétés du triangle, mais plus généralement des propriétés de l'espace. En revanche, les nombres se donnent comme des objets, issus d'un geste d'abstraction, mais autonomes. Le triangle, c'est l'abstraction en train de se faire, alors que les nombres, c'est l'abstraction comme production d'objets abstraits. Ceci justifie les efforts de définition des nombres, de façon à reconduire les nombres à des notions

logiques, pour éviter d'avoir à les reconnaître comme des entités ontologiques (platonisme). Il existe un autre problème philosophique directement lié aux nombres, c'est la question de l'infini. Cf. *Grammaire philosophique* à propos des preuves par récurrence. La question de l'abstraction dans le cas des nombres est délicate car deux types d'abstraction sont en fait en jeu : une abstraction philosophique du point de vue de laquelle les nombres doivent à la fois être des objets individués et s'appliquer à absolument toutes choses ; une abstraction mathématique du point de vue de laquelle l'idée intuitive de nombre doit être à la fois ressaisie et généralisée. Le problème du platonisme ne se pose que si on pense que l'existence des nombres doit constituer une objectivité mathématique alors qu'elle n'est que logique (cf. Frege). (Débats un peu vains qui parasitent une partie de la philosophie analytique des mathématiques.) Le problème de l'infini ne se pose que si les nombres sont pris individuellement et qu'on cherche à en faire l'exhaustion (le nombre infini de tous les nombres entiers), alors que les nombres sont à considérer collectivement comme formant une certaine structure (= ce qu'ont en commun des systèmes d'objets isomorphes), qui relève des seules mathématiques. (Débats un peu vains qui parasitent une partie de la tradition métaphysique.)

Auteurs : Frege (FA), Dedekind, Cantor & théorie moderne des ensembles (ordinaux, cardinaux).

## 1 Frege

### 1.1 L'interprétation logiciste de l'arithmétique

Comme le dit Coffa<sup>1</sup>, le symbolisme des mathématiques ne peut constituer pour Kant qu'une *Anschauungsschrift*, un système symbolique permettant de rendre intuitif un modèle du discours mathématique. Au contraire, avec sa *Begriffsschrift*, Frege proposa un programme directement opposé à Kant, à savoir un symbolisme destiné à représenter non pas un objet de discours, mais la façon dont nous parlons d'objets : non pas des choses pensées particulières, mais la pensée elle-même, considérée objectivement. L'idée est de mettre au point un langage logiquement parfait, c'est-à-dire apte à refléter directement, par la construction même des jugements complexes (= syntaxiquement) les relations de dérivabilité et les conditions de validité des contenus considérés. Ce langage parfait, c'est ce que Frege appelle l'Idéographie. C'est un nouveau cadre d'expression des inférences (et en particulier des inférences mathématiques), caractérisé par : une écriture bidimensionnelle (unité de mesure = la preuve) ; un symbolisme quantificationnel (permettant de découper les contenus conceptuels pertinents) ; un régime de substitutions. La conséquence est que tous les jugements déduits dans le cadre de l'Idéographie le sont tous à partir de quelques lois logiques fondamentales (les substitutions permettent de leur donner une portée schématique) au moyen d'inférences réduites à l'application du modus ponens (modulo justement les substitutions). L'idéographie n'est pas seulement un formalisme logique autonome, un outil de calcul logique, mais une représentation adéquate de ce qu'est la pensée rigoureuse (= la « pensée pure »). L'un des titres de gloire de la BS fut de réussir à dériver de manière purement logique le principe de récurrence, c'est-à-dire ce qui jusqu'alors semblait le principe fondamental irréductiblement intuitif de l'arithmétique. À la suite de la BS, l'arithmétique peut apparaître non plus comme relative à un domaine spécifique (d'intuition), mais comme coextensive à la dimension la plus générale de la pensée.

L'œuvre frégeenne fut essentiellement consacrée à une analyse de l'arithmétique (de ses concepts et de ses vérités). Dans la mesure où Frege *définit* comme « analytique » ce qui est dérivable seulement de la logique et de définitions, la thèse de l'analyticité de l'arithmétique ne s'oppose pas en soi à la position kantienne : car entretemps la notion de logique a complètement changé de sens. En revanche, Frege insiste sur la généralité illimitée propre à l'arithmétique,

---

<sup>1</sup>[Coffa, 1991], p. 64.

au-delà de tout domaine d'intuition. La justification des jugements analytiques et le décompte des principes logiques ne sont pas très développés chez Frege, mais l'essentiel pour Frege est de « mettre en évidence les relations des jugements entre eux » (cf. §13), et en particulier qu'aucune intuition n'a à se surajouter à la représentation idéographique pour expliquer le passage d'un jugement à un autre.

BS, §23 : [...] la pensée pure, faisant abstraction de tout contenu donné par les sens, ou même par une intuition *a priori*, peut produire des jugements ne paraissant être possibles à première vue qu'en se fondant sur une intuition quelconque, à partir du contenu qui provient uniquement de sa propre caractérisation particulière. On peut faire une comparaison avec la condensation par laquelle on est parvenu à changer l'air, qui paraît n'être rien à la conscience d'un enfant, en un liquide visible formant des gouttes. Les propositions sur les suites qui sont développées ci-dessous surpassent de loin en généralité toutes les propositions similaires qui peuvent être dérivées d'une intuition quelconque des suites.

Autrement dit : la pensée pure, indépendamment de toute intuition, même *a priori*, est capable de produire des jugements qui à première vue semblent fondées sur une forme ou une autre d'intuition. Image de la condensation : l'air que l'enfant pense immatériel peut par condensation être transformé en un liquide. De même, la pensée pure semble ne rien pouvoir produire, mais s'avère capable [par déploiement plutôt que par condensation !] de donner lieu à des jugements dépassant en généralité tout ce qui peut être dérivé de n'importe quelle intuition.

FA, §14 : Les propositions empiriques valent pour la réalité physique et psychologique ; les vérités de la géométrie régissent, elles, le domaine de ce qui est objet d'intuition spatiale [...]. Les lois arithmétiques gouvernent le domaine du nombrable. C'est le plus vaste. Il inclut non seulement le réel, non seulement l'intuitif, mais tout le pensable. Ne faut-il pas de même que les lois des nombres aient un lien très intime avec celles de la pensée ?

#### Contenu des *Fondements de l'arithmétique* :

FA, 7, 9 : critique de Mill. Problème : comment rendre compte de l'applicabilité constitutive de l'arithmétique sans pour autant soutenir une adhérence directe de l'arithmétique à l'expérience (l'addition comme empilement) ?

10, p. 138 : question de l'unité, et question du nombre comme agrégat d'unités. Les unités doivent / ne peuvent être identiques (§36 / §38).

#### Solution de la difficulté :

38 : Il n'y a pas différents nombres un, il n'y en a qu'un seul. 1 est un nom propre, mais c'est une entité d'ordre conceptuel (non une entité matérielle) – cf. suite.

45 : Le nombre n'est pas abstrait des choses comme le sont les couleurs.

46 : Un nombre s'attribue à un *concept*.

47 : Donner un nombre, c'est exprimer un fait indépendant de notre manière de voir.

55-56 : « Le nombre 0 appartient au concept *F* si ... », et « Le nombre N appartient au concept *F* si ... ». Frege rend ainsi compte de l'applicabilité de l'arithmétique : les objets tombent sous des concepts qui eux-mêmes tombent sous les nombres. Il y a dix merveilles du monde ssi le nombre du concept « merveille du monde » est dix. Mais problème de Jules César.

62-63 : Problème de définir l'identité de deux nombres (principe de Hume). Idée de correspondance univoque entre concepts. Le concept de nombre cardinal « doit recevoir sa détermination de notre définition de l'identité de deux nombres » (p. 189).

65 : Principe d'abstraction (la direction de la droite *a* est identique à la direction de la droite *b* ssi la droite *a* est parallèle à la droite *b*).

66 : Problème de Jules César bis : évaluation de «  $q$  est identique au nombre de  $F$  » ? Nécessité d'une définition directe, qui caractérise directement un objet déterminé.

68 : La direction de la droite  $a$  n'est rien d'autre que l'ensemble de toutes les droites qui ont la même direction que la droite  $a$ , c'est donc « l'extension du concept 'parallèle à la droite  $a$ ' (p. 193). De même : « Le nombre qui appartient au concept  $F$  est l'extension du concept 'équinumérique au concept  $F$ ' » (p. 194). NB : en note, Frege précise qu'il suppose « qu'on sait ce qu'est une extension de concept ».

74 :  $0$  = nombre qui appartient au concept « non identique à soi-même ».

75 :  $0$  est en fait le nombre qui appartient à tout concept sous lequel rien ne tombe (illustration de l'application directe à l'expérience en dépit du fait que les nombres sont définis logiquement, et ne sont nullement extraits de l'expérience à la manière de Mill).

76 : «  $n$  suit immédiatement  $m$  dans la suite naturelle des nombres »,  $mSn$  (" $n = m + 1$ "), s'il existe un concept  $F$  et un objet  $x$  tombant sous  $F$ , tel que  $n$  soit le nombre de  $F$  et  $m$  le nombre du concept « tomber sous  $F$  sans être  $x$  ».

79 : Soit  $\Phi$  une relation et  $a$  un objet.

- Un concept  $F$  est une *propriété issue de  $a$*  (dans la suite déterminée par  $\Phi$ ) si :  $\forall x (a\Phi x \rightarrow Fx)$
- Un concept  $F$  est une *propriété héréditaire* (dans la suite déterminée par  $\Phi$ ) si :  $\forall x\forall y (Fx \rightarrow (x\Phi y \rightarrow Fy))$
- $a\Phi^*b$  ( $b$  suit  $a$  dans la suite déterminée par  $\Phi$ ) si, pour toute propriété  $F$  héréditaire issue de  $a$ ,  $Fb$ .
- $y$  appartient à la  $\Phi$ -suite qui commence avec  $x$ , ou encore  $x$  appartient à la  $\Phi$ -suite qui se termine par  $y$ , si  $x\Phi^*y \vee y = x$ .

82 Soit  $n$  un nombre. On considère le concept « appartenir à la suite naturelle des nombres qui se termine par  $n$  ». Le nombre de ce concept est  $n + 1$  : démonstration par récurrence (le principe de récurrence dans la BS étant une conséquence immédiate de la définition de « suivre dans une suite »). On démontre le principe de récurrence, et on peut alors l'appliquer comme principe de démonstration.

Corollaire : la suite des nombres est infinie.

$NC(n) := \exists F : n = N(F)$ .

$NN(n) := n$  appartient à la suite naturelle des nombres qui commence avec  $0$ .

## 2 Dedekind

*Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), *Continuité et nombres irrationnels. Was sind und was sollen die Zahlen* (1888), *Que sont et à quoi servent les nombres ?*. Correspondance avec Keferstein (1890). (Keferstein était un professeur de mathématiques à Hamburg, intéressé notamment par des questions de pédagogie à propos des mathématiques.)

### 2.1 Lettre à Keferstein du 27 février 1890

Richard Dedekind (1831-1916), mathématicien allemand, est l'inspirateur de la méthode axiomatique propre aux mathématiques modernes : un système d'axiomes ressaisit toutes les propriétés formelles qui définissent une certaine *structure*, dont les réalisations peuvent varier, mais qui est la seule chose véritablement visée par le mathématicien. Ce que vise Dedekind dans *Que sont et à quoi servent les nombres ?* est la structure des nombres entiers et la justification de l'induction par laquelle on raisonne sur cette structure.

L'une des idées directrices de Dedekind (dans *Que sont les nombres et à quoi servent-ils ?*) est que la théorie des nombres doit être considérée comme une partie de la logique. Dedekind précise ainsi : « En parlant de l'arithmétique [...] comme étant une partie de la logique, je veux dire que je considère le concept de nombre comme entièrement indépendant des notions ou intuitions de l'espace et du temps, que je le considère comme résultant immédiatement des lois de la pensée. » Au §73 des *Que sont les nombres*, Dedekind décrit la notion d'ordinal (que, contrairement à Frege, il considère comme plus primitive que celle de cardinal) comme le résultat d'un processus d'abstraction :

Si en considérant un système simplement infini  $N$ , ordonné par une représentation  $\varphi$ , on fait totalement abstraction de la nature particulière des éléments, que l'on ne retient simplement que le fait qu'ils sont différents et ne considère que les relations établies entre eux par la représentation  $\varphi$  qui définit l'ordre, alors ces éléments s'appellent *nombres naturels* ou *nombres ordinaux* ou simplement *nombres*, et l'élément fondamental 1 s'appelle le *nombre fondamental* de la suite  $N$  des nombres. Étant donnée cette libération des éléments de tout autre contenu (abstraction), on peut à juste titre les qualifier de libre création de l'esprit humain.

(Les notions de « système simplement infini », de « représentation » et de « ordre » sont expliquées plus bas.)

Bien que partageant la même inspiration logiciste que Dedekind, Frege n'était pas satisfait par les résidus psychologiques apparents de la définition de Dedekind. La référence au processus de l'abstraction, l'emploi du terme de « création » à propos des nombres (et des lois sur lesquelles ils reposent), donnent un statut seulement psychologique à l'arithmétique, alors qu'il s'agit au contraire d'établir sa certitude objective. Dedekind répondit à ces reproches de subjectivisme dans la lettre à Keferstein du 27 février 1890, dans laquelle il décrit *Que sont les nombres* comme une réponse à la question suivante à propos de la suite  $N$  des nombres entiers :

Quelles sont les propriétés fondamentales de cette suite  $N$ , les propriétés indépendantes les unes des autres, *i.e.* irréductibles, et dont découlent toutes les autres comme de simples conséquences ? Comment faut-il les dépouiller de leur caractère spécifiquement arithmétique et les subordonner ainsi aux concepts généraux et aux activités de l'entendement *sans lesquels* rien n'est pensé et *grâce auxquels* nos preuves peuvent être sûres et achevées, nos concepts et nos définitions tout à fait exempts de contradiction ?

Comme on le voit, Dedekind conçoit les « lois de la pensée » comme Frege, de manière absolument non psychologique, comme les lois sur lesquelles on doit s'appuyer et que l'on doit respecter si l'on veut tout simplement penser. Cf. la lettre de Dedekind à Weber du 24 janvier 1888 : nous sommes « une espèce de race divine, et possédons sans nul doute un pouvoir créateur non seulement dans le domaine des choses matérielles [chemins de fer, télégraphe], mais plus particulièrement dans celui des choses intellectuelles ». Ce pouvoir créateur qui est le nôtre en mathématique n'est pas moins objectif et soumis aux lois logiques, que notre création d'artefacts matériels n'est soumise aux lois objectives de la physique.

(En fait le reproche de Frege porte sur les termes employés de façon non critique par Dedekind : « système » (ensemble), « chose appartenant à une autre ». Dedekind se place en fait du point de vue des standards de rigueur qui régissent la pratique mathématique : de ce point de vue, parler d'ensemble et d'appartenance ne pose pas de problème. Mais le statut ou non logique de la théorie des ensembles va brutalement devenir une question essentielle avec la découverte du paradoxe de Russell.)

Dedekind poursuit : « La suite  $N$  des nombres forme un *système* d'individus ou d'éléments, appelés « nombres ». Il faut donc considérer l'essence des systèmes en général. » Ce qui est frappant, c'est que la série intuitive des nombres entiers est à la fois ce qui est visé, ce qu'il

s'agit de définir ou de ressaisir, mais c'est en même temps seulement le point de départ d'une généralisation. La structure des nombres entiers ne peut être détachée de la série intuitive des nombres entiers que par un travail de généralisation. La structure des nombres est ce que la série des nombres a en commun avec ... toute autre configuration ayant la même structure – ce qui est une façon circulaire de décrire les choses tant que la structure elle-même n'a pas été dégagée. Toute la question est donc de déterminer les lignes suivant lesquelles généraliser. C'est en ce point que la série intuitive des nombres sert de guide. « Les éléments du système  $N$  sont soumis à un certain rapport mutuel et à un certain ordre. » C'est cela que Dedekind appelle la structure de la suite des nombres. Il faut donc considérer tous les systèmes d'objets analogues (généralisation). Ceci revient à considérer la suite  $N$  indépendamment de la nature particulière de ses éléments, en considérant ceux-ci comme de simples unités *formelles*, comme le simple support de relations (abstraction). Généralisation et abstraction vont donc de pair. De la considération de l'opération successeur et de ses propriétés formelles, Dedekind déduit qu'il faut considérer une *application* ou « *représentation* »  $\varphi$  d'un système quelconque  $S$  dans lui-même ayant comme propriétés que 1)  $\varphi$  est injective (« semblable »); 2)  $\varphi(S)$  est une partie propre de  $S$ ; 3) il existe un unique élément de  $S$  n'appartenant pas à  $\varphi(S)$ , appelé l'élément de base de  $S$ , et noté 1. Dedekind prétend que ces propriétés suffisent à caractériser  $S$  comme un « système ordonné simplement infini ».

Cette généralisation doit en retour être tempérée par la reconsidération du point de départ  $N$ . En effet, la définition qui vient d'être donnée autorise l'intrusion d'éléments étrangers à  $N$ . Soit  $S$  le résultat de l'adjonction à  $N$  d'un ensemble  $T$  de nouveaux éléments. Soit  $\varphi$  l'opération successeur sur  $N$ . À présent soit  $\varphi'$  l'opération sur  $S$  telle que la restriction de  $\varphi'$  à  $N$  soit  $\varphi$  et la restriction de  $\varphi'$  à  $T$  soit l'identité. Le système  $\langle S, \varphi' \rangle$  est simplement infini, et pourtant contient également, outre les éléments de  $N$ , d'autres éléments  $t \in T$  n'ayant aucun lien avec  $N$  par l'application  $\varphi$ . Le système  $S$  obtenu n'a aucune raison de vérifier les théorèmes arithmétiques vrais dans  $N$ . Comment épurer le système  $S$  pour qu'il se réduise à (un système isomorphe à)  $N$  ?

Certes le problème se réduit à un jeu facile pour quoi se donne la suite naturelle des entiers et le langage de l'arithmétique. Car, alors, il suffit de dire qu'un élément appartient à la suite  $N$  si, et seulement si je peux réellement l'obtenir à partir de 1 au bout d'un nombre fini de répétitions de l'application  $\varphi$  [...] sans jamais rencontrer d'éléments  $t$  étrangers à la suite  $N$ . Malheureusement cette manière de distinguer ceux des éléments  $t$  qui doivent être exclus du système  $S$  et les éléments  $n$  qu'il faut y maintenir et caractériser est totalement inutilisable. Elle renferme un cercle vicieux des plus évidents et de la pire des sortes.

La solution de Dedekind consiste à considérer l'*intersection* de toutes les chaînes de  $S$  qui contiennent l'élément de base 1, de façon à éliminer tous les intrus. Mais il reste à présent à voir précisément ce qu'il faut entendre par « système », « représentation », « chaîne », etc., c'est-à-dire à voir comment Dedekind introduit et définit tous les termes qui vont lui permettre de définir la structure des nombres entiers.

## 2.2 Que sont et à quoi servent les nombres ?

### 2.2.1 I. Système d'éléments.

*Chose (Ding)* (1) : n'importe quel objet de pensée.

*Système (System)* (2) : n'importe quelle multiplicité de choses. Chacune de ces choses est alors dite *contenues* dans ce système, et le système est dit *composé* de ces choses.

*Partie* d'un système (3).

La *composition* de plusieurs systèmes est leur réunion (au sens ensembliste).

Une chose est *élément commun* à plusieurs systèmes si elle appartient à chacun d'eux, autrement dit si elle fait partie de leur intersection. L'ensemble des éléments communs à plusieurs systèmes compose leur *système commun*.

## 2.2.2 II. Représentation d'un système.

*Représentation (Abbildung)* (21) d'un système  $S$  : « Par une *représentation*  $\varphi$  d'un système  $S$  on entend une loi selon laquelle à tout élément déterminé  $s$  de  $S$  appartient une chose déterminée qui s'appelle l'*image* de  $s$  et se note  $\varphi(s)$ . » On note également  $s'$  pour  $\varphi(s)$  et  $A'$  pour l'*image (Bild)*  $\varphi(A)$  de  $A$  lorsque  $A \subseteq S$ .

## 2.2.3 III. Similitude d'une représentation. Systèmes semblables.

*Représentation semblable (ahnlich)* (26) : injective en tant qu'application ( $s' = t'$  implique  $s = t$ ). Cette propriété rend possible la considération de la représentation réciproque  $\bar{\varphi}$  du système  $S'$  dans le système  $S$  ( $\bar{\varphi}(s') = s$ ). La représentation  $\bar{\varphi}$  est elle-même évidemment semblable, et la composition  $\bar{\varphi} \circ \varphi$  est la représentation identique de  $S$ .

Deux systèmes  $R$  et  $S$  sont *semblables* (32) s'il existe une représentation semblable  $\phi$  de  $S$  telle que  $\phi(S) = R$ .

## 2.2.4 IV. Similitude d'une représentation. Systèmes semblables.

*Représentation d'un système dans lui-même* (36) : c'est une représentation  $\phi$  de  $S$  telle que  $S' := \phi(S) \subseteq S$ .

Une *chaîne (Kette)* (37) est une partie  $K$  d'un système  $S$  muni d'une représentation semblable dans lui-même, telle que  $K' \subseteq K$ . Un même système peut être muni de différentes représentations, mais une chaîne est un système relatif à une représentation déterminée (implicite). (38) (Th) :  $S$  est une chaîne. (39) : l'image d'une chaîne  $K'$  est une chaîne.

(41) Si  $A'$  est une partie d'une chaîne  $L$  (sous-entendu : au sein d'un système  $\langle S, \phi \rangle$ ), alors il existe une chaîne  $K$  telle que  $A \subseteq K$  et  $K' \subseteq L$ . La composition de  $A$  et de  $L$  est une telle chaîne  $K$ . Ce résultat justifie la considération des systèmes  $T$  et  $S$  dans la lettre à Keferstein.

(42) : le système composé de plusieurs chaînes est une chaîne.

(43) : le système commun de plusieurs chaînes est une chaîne. Ce dernier résultat justifie la solution proposée par Dedekind dans la lettre.

(44) : Soit  $A$  une partie de  $S$ . On note alors  $A_0$  le système commun de toutes les chaînes dont  $A$  est une partie :  $A_0$  est une chaîne en vertu de (43), appelée la *chaîne de  $A$*  (la chaîne engendrée par  $A$ ). Pour préciser la représentation  $\phi$ , Dedekind propose également d'écrire  $\phi_0(A)$  au lieu de  $A_0$ . Dans le cas où  $A$  est réduite à un unique élément  $a$ , on note  $a_0$  au lieu de  $\{a\}_0$ . Dedekind propose donc en fait dans la lettre à Keferstein de considérer la chaîne  $N := 1_0$  engendrée par 1 (la chaîne de la partie composée de l'unique élément 1). La représentation correspondante est  $\varphi(n) = n + 1$  et la chaîne associée à tout nombre  $n$  est l'ensemble de  $n$  et de tous ses successeurs, c'est-à-dire  $\{n, n + 1, n + 2, \dots\}$ . D. ajoute dans la lettre : « L'essence complète de la suite  $N$  n'est établie que par là. » Il fait ensuite référence à l'Ideographie de Frege, car précisément l'itération indéfinie d'une opération est également pour Frege le noyau qu'il s'agit de ressaisir pour définir la suite des nombres.

(45) :  $A \subseteq A_0$ .

(46) :  $(A_0)' \subseteq A_0$  (puisque  $A_0$  est une chaîne).

(47) : Toute chaîne contenant  $A$  contient  $A_0$  :  $A_0$  est la plus petite chaîne contenant  $A$ . Toute partie  $A$  d'un système muni d'une représentation semblable génère donc une chaîne qui est minimale parmi toutes les chaînes contenant  $A$ . Ce résultat assure l'existence et l'unicité de  $A_0$ .

(49) :  $A' \subseteq (A_0)'$  (par (45)).

(50) :  $A' \subseteq A_0$  (par (46) et (49)).

(51) : Si  $A$  est une chaîne, alors  $A_0 = A$ .

(52)-(54) :  $B \subseteq A$  entraîne  $B \subseteq A_0$  et par suite  $B_0 \subseteq A_0$ ,

(57) :  $(A_0)' = (A')_0$ . Démonstration.  $A'$  est une partie de la chaîne  $(A')_0$ , donc par (41) il existe une chaîne  $K$  telle que  $A \subseteq K$  et  $K' \subseteq (A')_0$ . On a  $A_0 \subseteq K$ , et donc  $(A_0)' \subseteq K' \subseteq (A')_0$ . Réciproquement,  $A \subseteq A_0$  donc  $A' \subseteq (A_0)'$  et donc  $(A')_0 \subseteq (A_0)'$ .

(59) « Théorème d'induction complète » : Soit  $\Sigma$  un système éventuellement différent de  $S$ . Si  $A \subseteq \Sigma$  et que l'image de tout élément commun à  $A_0$  et à  $\Sigma$  appartient à  $\Sigma$ , alors  $A_0 \subseteq \Sigma$ . (Penser à  $S =$  ensemble des nombres naturels,  $\phi(n) = n + 1$  et  $\Sigma =$  ensemble des nombres ayant une certaine propriété.) Démonstration. Le système commun  $G$  de  $A_0$  et de  $\Sigma$  vérifie  $A \subseteq G \subseteq A_0$ , et puisque  $G \subseteq S$  on peut considérer  $G'$  : on a  $G' \subseteq A_0$  ( $G_0 \subseteq A_0$  donc par (50)  $G' \subseteq (A_0)'$ ). Mais d'autre part par hypothèse  $G' \subseteq \Sigma$ , donc finalement  $G$  est une chaîne. Et comme on suppose  $A \subseteq G$ ,  $A_0 \subseteq G$ , d'où  $A_0 \subseteq \Sigma$ .

Fin de la lettre à Keferstein :

7) Ayant dégagé dans mon analyse les caractères essentiels d'un système simplement infini (71, 73), dont la suite des nombres constitue un type abstrait, la question se pose de savoir s'il *existe* un tel système dans l'univers de nos pensées. Sans preuve d'existence logique on ne saurait décider si un tel système est à l'abri de contradictions internes. D'où la nécessité de ce genre de preuves (66, 72 de mon ouvrage).

8) Cela admis, on se demandera encore : y a-t-il dans ce qu'on a établi jusqu'ici une *methode de preuve* suffisante pour démontrer dans le cas général des théorèmes valables pour *tous* les nombres  $n$  ? Oui ! La célèbre preuve par induction repose sur les fondements solides du concept de chaîne (59, 60 et 80 de mon ouvrage).

9) Enfin, est-il possible de *définir*, sans contradiction des opérations sur  $N$  *tout entier* ? Oui ! C'est ce qui réalise le théorème 126 de mon ouvrage. Et c'est ce qui achève l'analyse, en permettant la construction synthétique de l'édifice. [...]

### 2.2.5 V. Le fini et l'infini.

(64) : Un système  $S$  est dit *infini* s'il est semblable à une partie propre de lui-même, et *fini* dans le cas contraire.

(66) : Il existe des systèmes infinis. Démonstration. « Le monde de mes pensées [*Mein Gedankenwelt*], i.e. la totalité  $S$  de toutes les choses qui peuvent être objet de ma pensée, est infini. En effet, si  $s$  désigne un élément de  $S$ , alors la pensée  $s'$ , que  $s$  peut être objet de ma pensée, est elle-même un élément de  $S$ . Si l'on considère  $s'$  comme image  $\varphi(s)$  de l'élément  $s$ , alors la représentation  $\varphi$  de  $S$  ainsi déterminée a la propriété que l'image  $S'$  est une partie de  $S$  ; plus précisément  $S'$  est une partie propre de  $S$ , car il y a dans  $S$  des éléments (par exemple, mon propre moi) différents de toute telle pensée  $s'$  et donc non contenus dans  $S'$ . Enfin, il est clair que si  $a, b$  sont des éléments différents de  $S$ , leurs images  $a', b'$  sont également différentes, et donc que (26) la représentation  $\varphi$  est distincte (semblable). Par conséquent,  $S$  est infini, *cqfd*. » Admettre l'existence d'un système contenant tous les objets de pensée conduit à des paradoxes (Cantor, Russell). Cantor le signala à Dedekind dans une lettre de 1896-97. Dans ses lettres à Dedekind des 28 juillet, 28 août et 31 août 1899, Cantor revient sur le problème et constate « qu'une pluralité peut être constituée de telle sorte que l'admission de l'« être simultané » [*Zusammensein*] de *tous* ses éléments conduit à une contradiction, de sorte qu'il est impossible de concevoir cette pluralité comme une unité, comme un 'objet achevé' », et nomme de telles pluralités des pluralités infinies « inconsistantes », qu'il distingue des pluralités infinies consistantes (ensembles infinis proprement dits). Cantor cite notamment « la collection de tout le pensable » comme exemple de totalité inconsistante : allusion claire au §66. Dedekind



renvoie à Bolzano (*Paradoxes de l'infini*, §13), mais Bolzano considère non pas le monde de mes pensées, mais « l'ensemble des propositions et vérités en soi », et non pas la représentation «  $s$  est objet de ma pensée », mais le fait que « la proposition  $A$  est vraie » est différente de la proposition  $A$  elle-même. Cela fait la différence entre une conception du pouvoir créateur de l'esprit humain, et une conception objectiviste de vérités en soi indépendantes de la pensée. (Dedekind commencera d'ailleurs à répondre que pour lui un système n'est pas un objet, mais la représentation en pensée d'une pluralité de choses comme formant une totalité.) Le théorème 72 et sa « démonstration » ne figuraient pas dans la première version (écrite entre 1872 et 1878). Mais la preuve d'existence d'un système infini s'est avérée nécessaire (cf. lettre à Keferstein), car les ensembles sont pour D. des êtres de pensée, et rien ne prouve qu'à une définition logique d'un système simplement infini corresponde une réalité dans le monde de nos pensées. Il y a là en germe l'idée que pour établir la consistance d'une théorie, il faut en exhiber un modèle. Par ailleurs, le mérite de la preuve de D. est d'avoir souligné que l'existence d'un ensemble infini n'allait pas de soi – d'ou la nécessité en fait de l'admettre comme axiome, dans les « Recherches sur les fondements de la théorie des ensembles » (1908) de Zermelo.

(67) : Deux systèmes semblables sont ou bien tous deux finis, ou bien tous deux infinis.

(70) : Si  $a$  est un élément d'un système  $S$  et si le système composé de tous les éléments de  $S$  distincts de  $a$  est fini, alors  $S$  est fini.

## 2.2.6 VI. Systèmes simplement infinis. Suite des nombres naturels.

(71) : « Définition. Un système  $N$  est dit *simplement infini*, s'il existe une représentation semblable  $\varphi$  de  $N$  dans lui-même qui fait de  $N$  la chaîne (44) d'un élément non contenu dans  $\varphi(N)$ . Nous appelons cet élément, que nous désignerons dans la suite par le symbole 1, *l'élément fondamental de  $N$* , et en même temps nous disons que le système simplement infini  $N$  est *ordonné* par cette représentation  $\varphi$ . [...] l'essence d'un système simplement infini consiste en l'existence d'une représentation  $\varphi$  de  $N$  et d'un élément 1 qui satisfont les conditions suivantes :

$\alpha$ .  $N' \subseteq N$ .

$\beta$ .  $N = 1_0$ .

$\gamma$ . L'élément 1 n'est pas contenu dans  $N'$ .

$\delta$ . La représentation  $\varphi$  est semblable. »

Ces quatre conditions constituent une axiomatique du domaine des entiers naturels, sur lequel toute théorie arithmétique peut être fondée pour être développée déductivement. Dans sa lettre à H. Weber du 24 janvier 1888, Dedekind affirme que les nombres naturels ne sont rien d'autre que « les éléments abstraits d'un système ordonné simplement infini ». Autrement dit, Dedekind fait basculer l'arithmétique du côté d'une arithmétique générale dont les principes et les théorèmes s'appliquent à *n'importe quel* système simplement infini, ce qui signifie une généralisation de  $\mathbb{N}$  en direction des propriétés structurales (« essentielles ») de  $\mathbb{N}$ . De l'aveu même de Peano, l'axiomatique de Peano est directement inspirée de ce paragraphe 71 (même si elle est exprimée comme une théorie du premier ordre, alors que les quatre conditions de Dedekind se formalisent comme une théorie – catégorique – du second ordre). La condition  $\beta$ . assure l'unicité de  $N$  en même temps qu'elle empêche l'intrusion d'éléments étrangers à  $N$  dont Dedekind parle dans sa lettre à Keferstein.

(73) : « Définition. Si, en considérant un système simplement infini  $N$ , ordonné par une représentation  $\varphi$ , on fait totalement abstraction de la nature particulière des éléments, que l'on ne retient simplement que le fait qu'ils sont différents et ne considère que les relations établies entre eux par la représentation  $\varphi$  qui définit l'ordre, alors ces éléments s'appellent *nombres naturels* ou *nombres ordinaux* ou encore tout simplement *nombres*, et l'élément fondamental 1 s'appelle le *nombre fondamental de la suite  $N$  des nombres*. Étant donnée cette libération des éléments de tout autre contenu (abstraction), on peut à juste titre les qualifier de libre création de l'esprit humain. Les relations ou lois, qui sont dérivées des seules conditions  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  de 71

et qui, pour cette raison, demeurent toujours identiques dans tous les systèmes ordonnés simplement infinis, forment, quels que puissent être les noms donnés aux éléments singuliers [...], le premier objet de la *science des nombres* ou *Arithmétique*. » L'abstraction en jeu ici n'est bien sûr pas une abstraction d'ordre psychologique, mais l'expression de la puissance créatrice que Dedekind accorde à l'esprit humain, et qui constitue avant tout une opération mathématique fondamentale : celle qui consiste à ne retenir d'un domaine d'objets que ses propriétés structurales, mathématiquement pertinentes, indépendantes de l'identité particulière des éléments du domaine. Voir les nombres entiers usuels, les nombres *naturels*, en tant qu'instance d'une structure beaucoup plus générale, qui est la seule chose qui importe mathématiquement, est une vue de l'esprit et en même temps une recreation des nombres. Les nombres naturels forment un cas de système infini, car comme on l'a dit il suffit de considérer  $\varphi(n) = n + 1 : N$  n'est alors rien d'autre que  $\varphi_0 1$ . C'est bien le « même » système dans les deux cas, à la différence que dans le premier cas on a affaire à un domaine supposé donné (?), alors que dans le second cas on a ressaisi  $N$  du point de vue de sa structure opératoire. Rien n'est changé en un sens, mais en un autre sens il y a mathématisation, et cet ajout est une création de l'esprit.  $N$  est présupposé donné pour être ensuite ressaisi comme cas de système simplement infini : ce n'est que superficiellement circulaire, car  $N$  n'est pas défini mais redéfini (ce qui est proprement défini, c'est le concept de système simplement infini).

(74) : Tout nombre  $n$  est contenu dans sa chaîne  $n_0$ , et (par 53) la condition  $n \in m_0$  est équivalente à la condition  $n_0 \subseteq m_0$ .

(79) :  $N$  est la seule chaîne de nombres [c'est-à-dire la seule chaîne composée de nombres naturels] qui contienne l'élément fondamental 1.

(80) (Induction complète dans le cas des nombres) : Pour montrer qu'une propriété est vraie de tous les nombres d'une chaîne  $m_0$ , il suffit de montrer qu'elle est vraie de  $m$  et que si elle est vraie d'un élément quelconque  $n$  de  $m_0$ , alors elle est également vraie de  $n'$ .

## 2.2.7 VII. Nombres plus grands et nombres plus petits.

(81) : Tout nombre  $n$  est différent de son successeur  $n'$ . Démonstration par induction. C'est vrai de 1, car  $1 \notin N'$  (cf. 71,  $\gamma$ .), alors que bien sûr  $1' \in N'$ . Supposons que ce soit vrai de  $n$ . Mais dans ce cas  $\varphi(n) \neq \varphi(n')$ , du fait que  $\varphi$  est semblable (si  $s' = t' \rightarrow s = t$ , cela revient à dire que  $s \neq t \rightarrow s' \neq t'$ ), autrement dit  $n' \neq (n)'$ , c'est-à-dire que la propriété est vraie de  $n'$ .

(82) : L'image de la chaîne  $(n')_0$  contient  $n'$  mais ne contient pas  $n$ . Démonstration par induction.

(85) : Si un nombre  $n$  n'est pas contenu dans une chaîne de nombres  $K$ , alors  $K \subseteq n'_0$ .

(88) : Si  $m$  et  $n$  sont deux nombres distincts, alors, des deux chaînes  $m_0$  et  $n_0$ , l'une est une partie propre de l'autre. On a alors ou bien  $n_0 \subseteq m'_0$  ou bien  $m_0 \subseteq n'_0$ . Démonstration. a) Si  $n$  est contenu dans  $m_0$ , alors (par 74)  $n_0 \subseteq m_0$ , et d'autre part  $m \notin n_0$  (car sinon on aurait également  $m_0 \subseteq n_0$ , donc  $m_0 = n_0$  et donc  $m = n$ ). Par conséquent  $n_0$  est une partie propre de  $m_0$  ( $m \in_0^m$  et  $m \notin n_0$ ) :  $n_0 \subset m_0$ , et par conséquent  $n_0 \subseteq m'_0$ . b) Si au contraire  $n$  n'est pas contenu dans  $m_0$ , alors 85 permet de conclure.

(89) : Définition. Le nombre  $m$  est dit *plus petit* que le nombre  $n$  (et  $n$  *plus grand* que  $m$ ) ; et on écrit symboliquement  $m < n$ ,  $n > m$  si on a  $n_0 \subseteq m'_0$ .

(90) : Étant donnés deux nombres  $m$  et  $n$ , de trois choses l'une : ou bien  $m = n$ , ou bien  $m < n$  ( $n > m$ ), ou bien  $n < m$  ( $m > n$ ).

(97) : Le plus petit nombre d'une chaîne  $n_0$  est  $n$ , et 1 est le plus petit de tous les nombres.

## 2.2.8 VIII. Parties finies et parties infinies de la suite des nombres.

### 2.3 Critique de la critique de Dedekind par Frege ([Tait, 1996])

Frege propose une explication (i) de la nature des nombres (ii) de la nécessité particulière attachée aux vérités arithmétiques (iii) de l'application de l'arithmétique à l'expérience. Mais le travail de Frege dans les FA arrive après l'oeuvre de Cantor et Dedekind, et ne parvient pas à fournir ce que Cantor et Dedekind justement réussissent à fournir : une reconstruction de l'ensemble ordonné complet que forment les nombres réels.

Cantor 1878 = « Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre ». Cantor 1883 = « Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, 5 », reedite a part sous le titre *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Cantor 1887-1888 = « Mitteilungen zur Lehre vom transfiniten I, II ». Cantor 1895-1897 = « Beitrage zur Begrundung des transfiniten Mengenlehre, I, II ».

En 1878, Cantor introduit la propriété pour deux ensembles, finis ou infinis, d'être équipotents. Avant 1883 tous les ensembles que Cantor considère sont des sous-ensembles d'espaces euclidiens de dimension finie (sous-ensembles de  $\mathbb{R}^k$ ), dont Cantor montre qu'ils ont tous la puissance du continu, mais en 1883 Cantor introduit des ensembles de cardinalités supérieures à celle du continu, et ainsi une hiérarchie autonome de cardinaux infinis. La notion d'ordinal reste elle-même développée pour elle-même : même si Cantor remarque que tout ordinal est le (représentant du) type d'ordre commun à une classe d'ensembles bien ordonnés, les ordinaux ne sont pas définis comme les types d'ordres d'ensembles bien ordonnés. Cantor ne considère en fait comme seul ensemble disponible ayant pour type d'ordre l'ordinal  $\alpha$ , que l'ensemble des prédécesseurs de  $\alpha$ . Ce n'est que dans les *Mitteilungen* puis les *Beiträge* que Cantor introduit la conception abstractionniste des cardinaux et des ordinaux :

Par « puissance » ou « nombre cardinal » de  $M$  nous entendons le concept général qui, avec l'aide de notre faculté active de penser, est extrait de l'ensemble  $M$ , en ceci que nous faisons abstraction de la nature des éléments particuliers de  $M$  et de l'ordre selon lequel ils se présentent. [...] Comme chaque élément  $m$  [de  $M$ ], pris séparément, dans la mesure où nous faisons abstraction de sa nature, devient une « unité », le nombre cardinal [...] de  $M$  est un agrégat déterminé composé d'unités, et ce nombre a dans notre esprit l'existence d'une image intellectuelle, ou encore d'une projection, de l'agrégat  $M$  de départ.

De même, à propos du type d'ordre d'un ensemble linéairement ordonné  $M$  :

Par là nous entendons le concept général qui est extrait de  $M$  lorsque nous faisons abstraction uniquement de la nature des éléments de  $M$ , pour ne retenir que l'ordre de précedence entre eux [...]. Ainsi le type d'ordre est lui-même un ensemble ordonné dont les éléments sont de pures unités [...].

Dès lors, les ordinaux sont définis comme les types d'ordre des ensembles bien ordonnés (y compris eux-mêmes). De même, les cardinaux, initialement définis comme ce qu'ont en commun deux ensembles équipotents (c'est-à-dire reliés par une correspondance biunivoque), deviennent des ensembles de pures unités, mais le passage de l'un à l'autre ne va pas de soi. Il y a bien deux conceptions successives chez Cantor : une conception opératoire, puis une conception abstractionniste.

Le §73 de *Que sont les nombres* fait écho à l'abstraction dont parle Cantor à propos des ordinaux. Cette abstraction a fait l'objet d'une critique acerbe de la part de Frege, dans son compte-rendu des *Mitteilungen* (1891), essentiellement parce que la méthode d'abstraction invoquée semble à Frege psychologue, et parce que les ensembles relativement auxquels se fait l'abstraction des ordinaux et des cardinaux sont conçus comme des collections dont la délimitation

n'est pas expliquée clairement. Les ensembles sont pour Frege des extensions de concepts, et le nombre appartenant à un concept  $F$  est lui-même une extension, l'extension du concept « équinumérique à  $F$  ». Or Cantor commence par introduire le cardinal d'un ensemble  $M$  comme un « concept général » sous lequel tombe tous les ensembles de ce cardinal (tous les ensembles équipotents à  $M$ ), pour l'identifier ensuite à un ensemble composé de « pures unités » : le concept devient pour ainsi dire une instance paradigmatique de lui-même. La position de Frege est conciliable avec l'idée que la considération du concept sous lequel tombe tout ensemble équipotent à un ensemble  $M$  revient à faire abstraction de la nature particulière des éléments de  $M$  ; ce à quoi s'oppose Frege, en revanche, est l'idée d'ensemble composé de pures unités (FA, §34-54). Cf. à ce sujet PoM, p. 249, où Russell s'oppose à l'idée que les termes d'une relation puissent être des objets n'ayant que des propriétés structurales. Dans le passage de l'introduction des Gg où Frege critique la construction des nombres par Dedekind, le prétendu psychologisme de Dedekind *n'est pas* la cible de Frege. Car pour Cantor comme pour Dedekind les nombres ne sont en rien psychologiques, et les lois qu'ils vérifient ne sont en rien subjectives. En fait, l'abstraction dont parle Cantor ou Dedekind est une abstraction productrice de nouveaux objets. Si je considère un ensemble  $\langle M, S \rangle$  et que je fais abstraction de cette structure (« foncteur d'oubli »), je reste avec le même ensemble. En revanche, si je passe d'un ensemble  $A$  à son cardinal  $|A|$ , tout ensemble  $B$  équipotent à  $A$  vérifiera  $|A| = |B|$  sans que cela implique  $A = B$ . Par conséquent  $|A|$  ne peut être assimilé à  $A$  pris de manière abstraite : l'abstraction n'est pas une soustraction de différences permettant d'identifier des ensembles distincts, mais bien une création.

Ceci dit, il reste vrai que tout énoncé à propos des objets abstraits est traductible en un énoncé à propos des objets dont cet objet abstrait a été abstrait. Par exemple, en introduisant la relation  $X \prec Y$  pour indiquer que  $X$  est équipotent à un sous-ensemble de  $Y$ , on a :

$$|X| \leq |Y| \leftrightarrow X \prec Y, \text{ et par ailleurs : } \sum_i |X_i| = |\coprod_i X_i| \text{ et } \prod_i |X_i| = |\prod_i X_i|,$$

de sorte que toute proposition relative à l'arithmétique des cardinaux est traductible en une proposition à propos d'ensembles, et la vérité de la première est fondée sur la vérité de la seconde. La seule chose à remarquer est que rien n'interdit que rien n'exclut, lorsqu'on passe d'un cardinal  $|X|$  à l'ensemble  $X$ , que  $X$  contienne lui-même des cardinaux parmi ses éléments, de sorte que la traduction n'élimine pas toute référence aux cardinaux, mais on peut toujours choisir un ensemble  $Y$  équipotent à  $X$  et ne contenant aucun cardinal. Chez Dedekind, tout système simplement infini  $\langle M, \phi, e \rangle$  est isomorphe à  $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}', 1 \rangle$ , et l'isomorphisme est unique. Toute proposition à propos de  $\mathbb{N}$  peut donc être traduite en une proposition à propos de  $M$ , mais la vérité de cette proposition ne dépend pas de la nature particulière de  $M$ , puisque n'importe quel autre système simplement infini pourrait être considéré à la place de  $M$ .

L'abstraction cantorienne et dedekindienne à l'œuvre dans l'introduction des cardinaux est donc bien une abstraction logique, réglée par des règles logiques de traduction et d'introduction de nouveaux objets. Si toute proposition à propos des objets abstraits est traduite en une proposition à propos des objets sur lesquels porte l'abstraction, pourquoi ne pas identifier les premiers aux seconds ? Dans une lettre à Weber de 1872 à propos des irrationnels, Dedekind explique qu'il considère que les nombres irrationnels sont seulement *représentés* par les coupures correspondantes, en ce qu'identifier les réels à des coupures, ou des objets basés sur un autre système de représentation a pour conséquence de munir les réels de propriétés qui n'ont rien à voir avec leurs propriétés en tant que nombres. Il ne s'agit pas, comme le pense Dummett<sup>2</sup>, d'un postulat abstractionniste (les nombres comme création de l'esprit humain), mais d'une recherche de la pertinence mathématique.

Une objection souvent faite aux abstractions de Cantor et Dedekind est qu'elles ne jouent aucun rôle dans les preuves. Mais l'abstraction logique a en fait pour but de fixer la grammaire, le domaine des propositions douées de signification, et par suite ce dont parlent les preuves. Par exemple, prouver la catégoricité des axiomes des ensembles linéairement ordonnés fixe le sens

<sup>2</sup>[Dummett, 1991], p. 250.

des propositions à propos des nombres tels qu'ils sont définis par Dedekind, par opposition à une représentations des nombres par des ensembles : car alors en effet rien dans le sens de la notion même de nombre ne permet de trancher la question de savoir si par exemple  $0 \in 2$ . Par ailleurs, ce que la lettre à Keferstein souligne est moins une réduction abstractionniste de l'arithmétique à qqch de plus primitif, que la question de la consistance interne de l'arithmétique elle-même. En cela, Dedekind anticipe Hilbert, pour qui l'existence mathématique consiste en une preuve de consistance et de complétude (ou de consistance et de catégoricité).

Une autre objection à l'encontre de la définition de Dedekind est qu'elle ne nous dit pas si le système des nombres commence avec 0 ou avec 1, c'est-à-dire si 1 est bien le vrai nombre un. Autrement dit, on peut définir par récurrence (§126 de *Que sont les nombres*) deux fonctions sur  $N$  :

$$F(m, 1) = m, F(m, n') = F(m, n)' \text{ et } G(m, 1) = m', G(m, n') = G(m, n)'$$

et par conséquent deux définitions de l'addition sont également possibles, autrement dit que le système des nombres pourrait être identifié à  $N^+ = \langle N, ', 1, G \rangle$  plutôt qu'à  $N$ .

Frege and Dedekind were at odds over two interconnected questions : whether or not the use of natural numbers to give the cardinality of finite totalities is one of their distinguishing characteristics, which ought therefore to figure in their definition ; and whether it is possible, not merely to characterize the abstract structure of the system of natural numbers, but to identify the natural numbers solely in terms of that structure. Unlike Frege's, Dedekind's natural numbers have no properties other than their positions in the ordering determined by their generating operation, and those derivable from them ; the question is whether such a conception is coherent<sup>3</sup>.

Selon Dummett (et en cela Frege a raison) le propre d'un nombre (en tout cas d'un entier) n'est pas d'indiquer une position dans une progression quelconque, mais quelque chose de plus fondamental : « the fact that, if certain objects are counted 'One, two, three', or, equally, 'Naught, one, two', then there are three of them. The point is so simple that it needs a sophisticated intellect to overlook it ; and it shows Frege to have been right, as against Dedekind, to have made the use of the natural numbers as finite cardinals intrinsic to their characterization<sup>4</sup> ». Mais rien ne justifie que la possibilité d'appliquer les nombres cardinalement soit la principale et renferme l'essence des nombres. On a vu que Dedekind mettait au contraire l'accent sur le statut d'ordinaux des nombres. Dummett reproche à D. de définir l'addition comme une addition ordinale (définition par récurrence de  $G$ ), mais c'est au fond naturel pour un auteur pour qui le concept d'ordinal est plus fondamental que celui de cardinal. D. s'inscrit en cela dans une lignée incluant Kronecker<sup>5</sup> et Cantor. Le rôle fondamental d'un nombre n'est pas de numérer (de quantifier) mais d'énumérer (d'indiquer un type d'ordre). Même si l'on laisse de côté la dimension ordinale, les entiers sont censés pouvoir être utilisés comme des multiplicateurs externes (opération  $n.x$ ) au sein de n'importe quel système de grandeurs. Rien n'indique une possibilité d'application des entiers naturels comme étant plus essentielle que les autres.

Le logicisme de Frege consiste dans le postulat que les nombres s'appliquent à absolument toutes choses, au sens que nous pouvons compter absolument toutes choses, c'est-à-dire que « le nombre des  $x$  tels que  $\Phi(x)$  » doit pouvoir s'appliquer à n'importe quel concept  $\Phi(x)$ . C'est ce qui aux yeux de Frege rend le nombrable coextensif au pensable, et par suite justifie de considérer l'arithmétique comme de la logique (à charge de le montrer en détail). Pour Dedekind au contraire, la logicité de l'arithmétique consiste dans le fait qu'aucune science ne peut intervenir dans les principes de raisonnement en arithmétique. Mais cela n'exige pas d'affirmer l'universelle applicabilité des nombres, et par suite de gommer la structure d'ordre exprimée par les ordinaux. Frege insiste sur le lien que l'arithmétique doit garder avec la vie de tous les jours

<sup>3</sup>[Dummett, 1991], p. 51.

<sup>4</sup>p. 53.

<sup>5</sup>« Über den Wahlbegriff », 1887, traduit dans Heijenoort et dans *From Kant to Hilbert*.

(cf. §19 des FA). C'est pour cette raison que les nombres ne peuvent consister en un système de « pures unités », et encore moins d'unités spatiales ou temporelles, alors que pour D. rien n'exclut de prendre n'importe quel système simplement infini comme ensemble des entiers. Au §42 des FA, Frege ajoute un argument de principe : tout concept général d'ordre ne peut être plus primitif que celui de nombre, car l'appartenance de ces objets à une série ne peut être le fondement de la distinction faite entre ces objets, puisqu'il faut au contraire avoir déjà distingué d'une manière ou d'une autre ces objets pour pouvoir les arranger selon une série. Pourtant, pourrait-on opposer à Frege, rien n'interdit une série dont tous les membres sont identiques. Cela suppose d'admettre une séquence à  $n$  éléments dont les membres sont identiques, même si les choses nombrées elles ne sont pas identiques. Mais c'est ce que Frege exclut, car pour Frege les nombres sont des abstractions et non des paradigmes : les nombres sont des classes d'équivalence (nombre cardinal = classe d'équinuméricité d'un concept, nombre réel = classe de paires de grandeurs). Au fond, Frege reproche à Dedekind de ne pas faire de l'applicabilité des nombres à l'expérience un de leurs traits distinctifs fondamentaux. Mais c'est au fond que Frege ne vise justement pas l'essence des nombres, mais se demande plutôt ce que sont les nombres en dehors du fait d'être des nombres. Or c'est bien la question de *ce que sont* les nombres qui importe à Dedekind, et pour lui cette question consiste à faire apparaître les nombres comme constituant une structure, et n'étant rien hors de celle-ci.

Il y a un aspect dans la conception abstractionniste de Cantor des nombres ordinaux et cardinaux qui fait l'objet particulier des critiques de Frege : c'est que le nombre cardinal d'un ensemble est lui-même un ensemble, équipotent au premier, et dont les éléments sont censés être de « pures unités ». De même, le type d'ordre d'un ensemble ordonné est lui-même un ensemble ordonné de « pures unités », isomorphe au premier. Les ordinaux et les cardinaux se rapportent à des ensembles tout en étant eux-mêmes des ensembles. Quels ensembles ? Qu'est-ce que Cantor entend lorsqu'il parle de « pures unités » ? Deux interprétations sont possibles. La première (qui est la façon dont Frege lit Cantor) est que les éléments du cardinal d'un ensemble  $M$  sont obtenues en dépouillant les éléments de  $M$  de toutes les propriétés particulières qui les distinguent les uns des autres. La seconde interprétation est que l'abstraction porte non sur les éléments de  $M$ , mais sur  $M$  lui-même, par exemple comme extension de tel ou tel concept particulier. Selon cette seconde lecture, l'ensemble cardinal  $C$  correspondant à un ensemble  $M$  est composé d'éléments qui ne sont pas spécifiés au-delà du fait que ce sont des éléments de  $C$  et que  $C$  est équipotent à  $M$  : un ensemble cardinal est équipotent à un ensemble de points ou de pommes, mais sans être rien de tout cela. Il s'agit seulement d'une façon de poser que le cardinal de  $M$  et le cardinal de  $N$  seront les mêmes lorsque  $M$  et  $N$  sont équipotents, et c'est donc la seconde interprétation qui est la bonne, même si la formulation de Cantor est maladroite.

Au §39 des *Fondements*, Frege énonce le dilemme suivant lequel on peut produire un nombre ou bien en rassemblant différents objets distincts, ce qui conduit à un agglomérat dans lequel chacun des objets reste différent de tous les autres, ou bien en rassemblant des identiques, ce qui donne une seule chose et non une pluralité. Mais ce dilemme est déséquilibré : sa première branche concerne les choses auxquelles les nombres s'appliquent (à savoir des ensembles plutôt que des agrégats, obtenus en rassemblant différents objets), tandis que sa seconde branche concerne ce que sont les nombres eux-mêmes en tant qu'ensembles de pures unités. Cette dernière conception n'a rien d'incohérent : lorsque nous considérons un ensemble de deux chats, l'un blanc et l'autre noir, on a bien affaire à des unités distinguées par leurs propriétés respectives – mais lorsqu'on abstrait de cet ensemble un ensemble composé de pures unités, ces unités ne sont plus ni blanche ni noire, ni même des chats. Autrement dit, *la critique de Cantor par Frege est due à la confusion commise par Frege entre la nature et l'application des nombres*.

Au fond, Frege rapporte les nombres à des concepts plutôt qu'à des ensembles d'objets : le choix d'une unité et l'identification des différentes unités entre elles (dans la mesure où aucune propriété particulière ne les distingue les unes des autres) correspond exactement à l'élection d'un concept. Ceci étant, la considération de nombres infinis est susceptible de poser

des difficultés, dans la mesure où certains concepts, par exemple « être un cardinal », ne peuvent avoir de nombre correspondant (sous peine de paradoxe : si l'ensemble de tous les cardinaux avait un cardinal, ce cardinal serait à la fois un cardinal et supérieur à tout cardinal). On ne peut donc définir les cardinaux comme les extensions de concepts du type « équinumérique à  $F$  » car il existe des cas où  $F$  n'a pas de cardinal. Cantor avait en fait une toute autre théorie : une théorie autonome des ensembles permettant de définir les concepts d'ordinal et de cardinal, et d'introduire des « classes de nombres » (la classe des ordinaux finis, celle des ordinaux infinis dénombrables, ...) conçus comme paramètres primitifs : la question de savoir si un ensemble est bien défini devient celle de savoir si cet ensemble peut être montré fini ou équipotent à l'une des classes de nombres.

### 3 Développements plus récents

#### 3.1 Théorie des ensembles (Cantor et ZFC) ; arithmétique de Peano

#### 3.2 Débats contemporains : Benacerraf, « What numbers could not be » ; logicisme, néo-fregeanisme et structuralisme

### Références

[Coffa, 1991] Coffa, A. (1991). *The semantic tradition from Kant to Carnap*. Cambridge UP, Cambridge. To the Vienna Station.

[Dummett, 1991] Dummett, M. (1991). *Frege : Philosophy of Mathematics*. Cambridge UP, Harvard (Mass.).

[Tait, 1996] Tait, W. W. (1996). Frege versus Cantor and Dedekind : On the concept of number. In Schirn, M., editor, *Frege : Importance and Legacy*, pages 70–113. Walter de Gruyter, Berlin.