Licence MMIA troisième année — Année 2006-2007

Corrigé de l'examen du 13 juin 2007

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On note

$$P = \sum_{j=0}^{d^\circ(P)} a_j X^j$$

un élément de E. On considère les normes suivantes :

$$\|P\|_\infty = \sup_{0 \le k \le d^\circ(P)} |a_k| \ , \quad \|P\|_1 = \sum_{k=0}^{d^\circ(P)} |a_k| \ , \quad \|P\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{d^\circ(P)} a_k^2 \right)^{1/2} .$$

(i) *Donner une base et la dimension de l'espace E.*

Une base de E est $\{X_k, k \ge 0\}$. L'espace E est donc de dimension infinie dénombrable.

(ii) *Établir des inégalités de comparaison entre $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$.*

Pour tout polynôme P, on a

$$\|P\|_\infty \le \|P\|_2 \le \|P\|_1 \ .$$

(iii) *On considère la suite de polynômes $\{P_n\}_{n\ge1}$ définie par :*

$$P_n = 1 + X + \frac{1}{n} X^2 + \cdots + \frac{1}{n} X^{n+1} \ .$$

Étudier la limite de $\|P_n - (1+X)\|_1$, $\|P_n - (1+X)\|_2$ et $\|P_n - (1+X)\|_\infty$. Montrer que P_n tend vers $1+X$ au sens des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ mais pas au sens de la norme $\|\cdot\|_1$.

Pour tout $n \ge 1$, on a $P_n - (1+X) = n^{-1} \sum_{j=2}^{n+1} X^j$. On calcule

$$\|P_n - (1+X)\|_1 = 1 \ , \quad \|P_n - (1+X)\|_2 = n^{-1/2} \ ,$$
$$\|P_n - (1+X)\|_\infty = n^{-1} \ .$$

On a donc $\lim_{n\to\infty} \|P_n - (1+X)\|_1 = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \|P_n - (1+X)\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|P_n - (1+X)\|_2 = 0$. La suite $\{P_n\}$ converge donc vers $1+X$ pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_1$.

(iv) *Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes deux à deux.*

Puisque la suite $\{P_n\}$ converge pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_1$, les deux premières normes ne sont pas équivalentes à la troisième. On peut de même définir une suite qui converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_2$, par exemple la suite $Q_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} X^j$, pour conclure que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas non plus équivalentes.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

(i) *Pour $k \ge 0$, calculer les coefficients $c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x$.*

Pour $k = 0$, on a $c_0 = 2\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x = 2\pi^3/3$. Pour $k \geq 1$, on obtient, en intégrant deux fois par partie :

$$\begin{aligned} c_k &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4\pi(-1)^k}{k^2} + \frac{2}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi(-1)^k}{k^2}\ . \end{aligned}$$

(ii) *Pour $k \geq 1$, calculer les coefficients $s_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$.*

La fonction f étant paire, les coefficients s_k sont tous nuls.

(iii) *Exprimer l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction des coefficients c_k et s_k.*

Par le théorème de Parseval Bessel, on a

$$\frac{2\pi^5}{5} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{c_0^2}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \frac{2\pi^5}{9} + 16\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\ .$$

(iv) *Calculer la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4}$.*

Les égalités ci-dessus entraînent

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{2\pi^5/5 - 2\pi^5/9}{16\pi} = \frac{\pi^4}{90}\ .$$

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel de Hilbert (on admettra qu'il est complet) des suites $\{x_k, k \geq 1\}$ de carrés sommables muni de la norme $\|\cdot\|$ définie pour $x \in E$ par

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\ .$$

Pour $n \geq 1$, soit F_n le sous-espace de E des suites dont les éléments d'indice strictement supérieur à n sont nuls, et soit $G = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$.

(i) *Montrer que F_n est un fermé d'intérieur vide.*

F_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie n, donc c'est un fermé d'intérieur vide.

(ii) *G est-il un sous-espace vectoriel ?*

G est un sous-espace vectoriel comme réunion *croissante* de sous espaces vectoriels de E.

(iii) *Montrer que G est d'intérieur vide.*

G est une réunion dénonbrable de fermés d'intérieur vide d'un espace de Hilbert, qui est un cas particulier d'espace de Banach. Par le théorème de Baire, G est d'intérieur vide.

(iv) *Montrer que G est dense dans E.*

G est dense dans E car tout élément de E est limite d'une suite d'élément de E. Soit $x = \{x_k, k \geq 1\} \in E$ et soit x^n l'élément de E défini par

$$x_k^n = x_k \text{ si } k \leq n \text{ et } x_k^n = 0 \text{ si } k > n\ .$$

Alors $x^n \in F_n$ et

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n - x\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 = 0\ .$$