Université de Paris X Nanterre — Année 2006-2007
U.F.R. SEGMI

Licence de Sciences économiques et gestion première année
Corrigé de l'examen de Mathématiques II

Exercice 1. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante :

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \; .$$

(a) *Déterminer son domaine de définition D_f.*

Pour qu'une fraction rationnelle soit bien définie, il faut et il suffit que son dénominateur ne s'annule pas. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) *Déterminer la ligne de niveau* **1** *et la représenter graphiquement.*

La ligne de niveau **1** est l'ensemble des couples (x,y) de D_f tels que $f(x,y) = 1$.

$$\begin{aligned} f(x,y) = 1 &\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = 1 \; , \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2 = x^2+y^2 \; , \\ &\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 = x^2+y^2 \; , \\ &\Leftrightarrow 2xy = 0 \; , \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0 \; . \end{aligned}$$

La ligne de niveau **1** est donc l'union des deux axes, privée de $(0,0)$:

$$\{(x,y) \in D_f \mid f(x,y) = 1\} = \{(x,0)\,,\; x \neq 0\} \cup \{(0,y)\,,\;\; y \neq 0\} \; .$$

(c) *Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité.*

Soient $(x,y) \in D_f$ et $\lambda > 0$.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x + \lambda y)^2}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \frac{\lambda^2 (x+y)^2}{\lambda^2 (x^2+y^2)} = f(x,y) \; .$$

La fonction f est donc homogène de degré 0.

(d) *Calculer, pour $(x,y) \in D_f$, la quantité $x\partial f/\partial x + y \partial f/\partial y$.*

Par le théorème d'Euler, on sait que si f est homogène de degré r, on a, pour tout $(x,y) \in D_f$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r f(x,y) \; .$$

Dans le cas présent, on a $r = 0$, et donc $x\partial f/\partial x + y\partial f/\partial y = 0$ pour tout $(x,y) \in D_f$.

Exercice 2. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante :

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ .$$

(a) *Déterminer son ensemble de définition D_f.*

$D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(b) *Discuter l'existence et la nature des points stationnaires.*

La fonction f admet des dérivées partielles premières et secondes continues sur son domaine de définition, donc un point stationnaire doit annuler les dérivées premières. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \frac{1}{x^2} \ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{1}{y^2}$$

Un point stationnaire (x,y) vérifie donc

$$y - 1/x^2 = 0 \ , \quad x - 1/y^2 = 0 \ ,$$

et l'unique solution est $(x,y) = (1,1)$. Pour déterminer la nature du point stationnaire, il faut calculer les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3} \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y^3}$$

Au point $(1,1)$, on a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 2 \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1 \ .$$

La forme quadratique associée aux dérivées partielles secondes au point stationnaire est donc définie par

$$q(u,v) = u^2 + uv + v^2 \ .$$

Pour déterminer sa nature, il faut la réduire en somme de carrés.

$$q(u,v) = u^2 + uv + v^2 = \frac{3}{4}(u+v)^2 + \frac{1}{4}(u-v)^2$$

Les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ associés à cette décomposition en somme de carrés sont linéairement indépendants, donc c'est bien une réduction de Gauss. La signature de la forme quadratique est $(2,0)$. Elle est donc définie positive et donc le point stationnaire est un minimum.

Exercice 3. *Résoudre au sens des moindres carrés le système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & -1 \ , \\ x + y - z & = & 1 \ , \\ -x + y - z & = & 0 \ , \\ x + y - z & = & 1 \ . \end{array} \right.$$

Soient A la matrice et a le vecteur définis par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On cherche à résoudre au sens des moindres carrés l'équation $Au = b$ où u est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On sait que la solution est donnée par

$$u = ({}^tAA)^{-1}\, {}^tAa \; .$$

On pose $B = {}^tAA$ et $b = {}^tAa$. On cherche à résoudre le système $Bu = b$. Calculons tout d'abord B et b.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} ,$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On doit donc résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 4x + 2z & = & 1 \; , \\ 4y - 2z & = & 3 \; , \\ 2x - 2y + 4z & = & -1 \; . \end{array} \right.$$

Par la méthode du pivot, on obtient aisément la solution $u = {}^t(1/4, 3/4, 0)$.

Exercice 4. Soit le plan $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z) = 0\}$.

(a) *Donner une base de E.*

Une base de E est par exemple $\{{}^t(1, -1, 0), {}^t(1, 0, -1)\}$

(b) *Ecrire la matrice P de projection orthogonale sur E.*

Soit A la matrice de taille 3×2 dont les colonnes sont les deux vecteurs de la base de E ci-dessus. On sait que $P = A({}^tAA)^{-1}\, {}^tA$, soit

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

(c) *Calculer P^2.*

P étant une matrice de projection, on sait qu'elle est idempotente, i.e. $P^2 = P$.

(d) *Donner l'équation de la droite D orthogonale au plan E.*

Un système d'équation pour la droite D est $x = y = z$.

(e) *Soit $U = {}^t(1, 1, 1)$. Montrer que U se trouve sur la droite D.*

Les coordonnées de U vérifient les équations ci-dessus donc $U \in D$.

(f) Déterminer le vecteur W projection orthogonale de U sur le plan E.

Puisque U est sur la droite orthogonale à E, on a $W = 0$.